Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

MATEMATICA SUPERIOR - 2do Parcial (1 de julio de 2013)

Tema: 22 A

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4	5a	5b	Nota Final
1 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	2 p.	1 p.	1.5 p.	

Para aprobar es necesario sumar por lo menos 6 p. Nota: n = p - 2. TIEMPO MAXIMO: 120 minutos

Ejercicio 1: Dada la ecuación: $x^2 (x - 8) = 11 x - 25$

a) Indique la cantidad total de raíces reales y un intervalo de longitud 1 entre dos enteros para cada una de ellas. (No use calculadora graficadora)

b) Si es posible, utilice la función $g(x) = (8x^2 + 11 x - 25) / x^2$ para hallar la mayor raíz por punto fijo con error menor a 10^{-3}

c) Partiendo de $x_0 = 5$, realice 4 iteraciones por Newton-Raphson, indique si converge a una raíz, la cantidad de dígitos significativos que se pueden asegurar.

Ejercicio 2: Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando:

a) Toda matriz cuadrada simétrica y definida positiva, también es diagonal dominante.

b) Dado un conjunto de 11 puntos (x_i, y_i) por los que pasa un polinomio de grado 8, se puede asegurar que extrayendo 3 cualesquiera de los puntos, existirá otro polinomio de grado 8 que pasa por el conjunto de los puntos remanentes.

Ejercicio 3: Dada la siguiente tabla de datos:

x	-2	0	2	3	5	8
y	56	2	12	41	147	426

a) Halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos dados. Escríbalo en forma normalizada.

b) Halle un valor aproximado de la derivada segunda en x=0. Justifique la elección de la fórmula.

Ejercicio 4: Aproxime la función: $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en [1;3] por una recta de mínimos cuadrados.

Ejercicio 5: Dada $I = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-x^2} dx$

a) Indique si al resolverla por Trapecios con h= 0.02 se obtiene un valor mayor al exacto.

b) Halle la menor cantidad de subintervalos para asegurar que al resolverla por Trapecios el error sea menor que 10^{-3}

RESPUESTAS PARCIAL 2 TEMA 22 A

Ejercicio 1: $x^3 - 8x^2 - 11x + 25 = 0$ **a)** total: 3 raíces reales: (-3 ; -2) , (1 ; 2) y (8 ; 9)

b) Puede usarse $g(x) = (8x^2 + 11x - 25) / x^2$ para la raíz de (8 ; 9)

x	g(x)
9	8,91358025
8,91358025	8,91941629
8,91941629	8,91902045
8,91902045	8,91904729

c)

x	f	f'
5	-105	-16
-1,5625	18,8415527	21,3242188
-2,44607529	-10,5950103	46,0870576
-2,21618406	-0,79847514	39,1933603
-2,19581135	-0,00607139	38,5977439

Ejercicio 2:

a) FALSO. Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica y definida positiva, pero no es diagonal dominante.

b) VERDADERO, ya que al quedar solamente 8 puntos, hay infinitos polinomios de grado 8 que pasan por ellos, incluyendo al que pasaba por los 11 puntos dados.

Ejercicio 3: a)

-2	56					
0	2	-27				
2	12	5	8			
3	41	29	8	0		
5	147	53	8	0	0	
8	426	93	8	0	0	0

$P(x) = 56 - 27(x+2) + 8(x+2)x = 56 - 27x - 54 + 8x^2 + 16x \Rightarrow p(x) = 8x^2 - 11x + 2$

b) $f''(0) = (12 - 2*2 + 56)/2^2 = 16$ fórmula central, es la más precisa.

Ejercicio 4: planteo: $p(x) = a x + b$

Por sist. Ecuaciones: $2b + 4a = 3.2958 \wedge 4b + 26/3\, a = 6 \Rightarrow b = 3.4229 \wedge a = -0.8875$

$\Rightarrow p(x) = -0.8875x + 3.4229$

Ejercicio 5:

a) $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \Rightarrow f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + e^{-x^2} \cdot (-2) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2)$

Como $f'' < 0$ en [-0.5;0.5] entonces Trapecios da un valor MENOR al exacto.

b) $E = 1/12 \cdot h^2 \cdot M < 0.001$ Siendo M = valor máximo de f'' en [-0.5;0.5]

Para ello calculamos $f'''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (4x^2 - 2) + e^{-x^2} \cdot 8x = e^{-x^2} \cdot (-8x^3 + 12x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0 \vee x^2 = 3/2 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt{3/2} = 1.2247 \quad \vee \quad x = -\sqrt{3/2} = -1.2247$

La única que está en el intervalo es $x=0 \Rightarrow$ comparamos $f''(0) = -2$, $f''(-0.5) = f''(0.5) = -0.778$

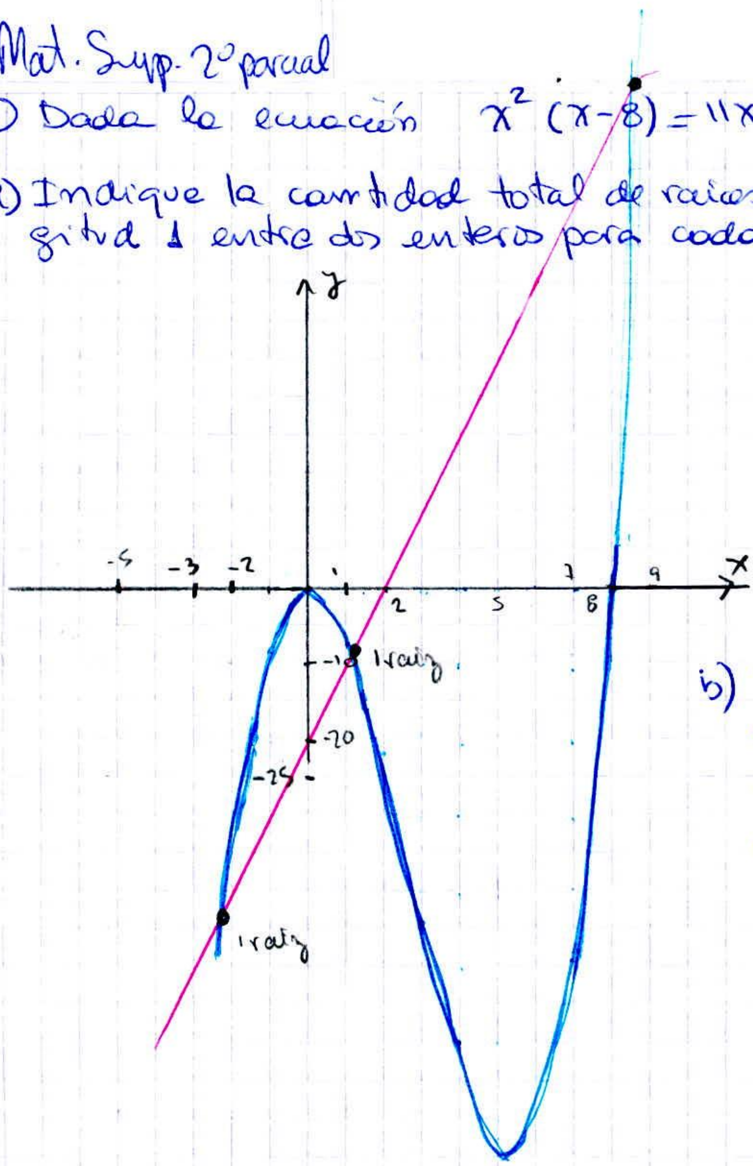
Por lo tanto M=2 Entonces: $E = 1/12 \cdot h^2 \cdot 2 < 0.001 \Rightarrow h^2 < 0.006 \Rightarrow h < 0{,}07745967$

Tomamos: h = 0.0625 con n = 16 subintervalos.

Mat. Sup. 2º parcial 1º-7-13

① Dada la ecuación $x^2(x-8) = 11x - 25$

a) Indique la cantidad total de raíces reales y un intervalo de longitud 1 entre dos enteros para cada una de ellas.



3 raíces:

1 en $[-3;-2]$

1 en $[1;2]$

1 en $[8;9]$

b) Si es posible, utilice la función $g(x) = \frac{8x^2+11x-25}{x^2}$ para hallar la mayor raíz por punto fijo con error menor a 10^{-3}

$$x^2(x-8) = 11x - 25$$

$$x - 8 = \frac{11x-25}{x^2} \rightarrow x = \frac{11x-25}{x^2} + 8$$

$$x = \frac{8x^2+11x-25}{x^2} = g(x) \checkmark$$

$$g(x) = \frac{8x^2+11x-25}{x^2} \rightarrow g'(x) = \frac{(16x+11)x^2 - (8x^2+11x-25)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\cancel{16x^3} + 11x^2 - \cancel{16x^3} - 22x^2 + 50x}{x^4} = \frac{-11x^2+50x}{x^4}$$

$g'(x) = \frac{-11x+50}{x^3}$ Busco máx. y mínimos $\rightarrow g''(x) = \frac{-11x^3 - (-11x+50)3x^2}{x^6}$

$$g''(x) = \frac{-11x^3 - (-33x^3 + 450x^2)}{x^6} = \frac{22x^3 - 450x^2}{x^6} = \frac{x^2(22x-450)}{x^6} = \frac{22x-450}{x^4}$$

$g''(x) = 0 \rightarrow 22x = 450 \rightarrow x = 20,\overline{45} \notin [8;9] \rightarrow$ los máx están en los extremos

$\rightarrow g'(8) = -0,07421875$ $g'(9) = -0,067215 \rightarrow |g'(x)| < 1 \therefore$ converge ✓ V

c) Partiendo de $x_0 = 5$, realice 4 iteraciones por Newton-Raphson, indique si converge a una raíz la cantidad de dígitos significativos que se pueden asegurar.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = x^3 - 8x^2 - 11x + 25$

$f'(x) = 3x^2 - 16x - 11$

$x_0 = 5$

$x_1 = -1,5625$

$x_2 = -2,446075$

$x_3 = -2,21618406$ $\rightarrow \varepsilon < 0,03$

$x_4 = -2,195811346$

converge a la raíz $\in [-3;-2]$

(2) Analice el valor de verdad de las sig. proposiciones, justificando:

a) toda matriz cuadrada simétrica y definida positiva también es diagonal dominante

$\boxed{F}$ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 5 - 4 = 1 > 0$ / $A = A^t$

pero no es diagonalmente dominante

b) Dado un conjunto de 11 puntos (x_i, y_i) por los que pasa un polinomio de grado 8, se puede asegurar que extrayendo 3 cualesquiera de los puntos, existirá otro polinomio de grado 8 que pasa por el conjunto de los puntos remanentes.

$\boxed{V}$ Al quitar 3 puntos quedan 8 por lo que se puede encontrar un polinomio interpolante con grado 7 o menor pero infinitos de grado 8

---

(3) Dada la sig. tabla de datos;

x	-2	0	2	3	5	8
y	56	2	12	41	147	426

a) Halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos dados. Escríbalo en forma normalizada.

x_i	$f x_i$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	
-2	56			
		$\frac{-54}{2} = -27$		
0	2		$\frac{32}{4} = 8$	
		$\frac{10}{2} = 5$		0
2	12		$\frac{24}{3} = 8$	
		$\frac{29}{1} = 29$		0
3	41		$\frac{24}{3} = 8$	
		$\frac{106}{2} = 53$		0
5	147		$\frac{40}{5} = 8$	
		$\frac{279}{3} = 93$		
8	426			

$P(x) = 56 - 27(x+2) + 8(x+2)x$

$$\boxed{P(x) = 8x^2 - 11x + 2}$$

$P(-2) = 56$ / $P(0) = 2$ / $P(2) = 12$ /

$P(3) = 41$ / $P(5) = 147$ / $P(8) = 426$ /

b) Halle un valor aproximado de la derivada segunda en $x = 0$. Justifique la elección de la fórmula.

Utilizo la central ya que da mayor exactitud y se cuentan con los datos para realizarlo

$$f''(0) = \frac{f(2) - 2f(0) + f(-2)}{h^2} \underset{h=2}{=} \frac{12 - 2 \times 2 + 56}{4} = \boxed{16 = f''(0)}$$ ✓

④ Aproxime la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en $[1;3]$ por una recta de mínimos cuadrados

$\int_1^3 1\,dx = 2$ $\quad \int_1^3 x\,dx = 4$ $\quad \int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}$ $\quad \int_1^3 \frac{3}{x}\,dx = 3{,}2958369$; $\quad \int_1^3 3\,dx = 6$ $\quad x\,F(x)$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3{,}295836866 \\ 4 & 26/3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} a_0 = 3{,}422939629 \\ a_1 = -0{,}887510598 \end{array}$$

$$\boxed{y = -0{,}887510598x + 3{,}422939629}$$ ✓

---

⑤ Dado $I = \int_{-0,5}^{0,5} e^{-x^2}\,dx$

a) Indique si al resolverla por trapecios con $h = 0{,}02$ se obtiene un valor mayor al exacto.

$E_T = \frac{a-b}{12} h^2 f''\varphi$

$f(x) = e^{-x^2} \to f'(x) = -2x e^{-x^2} \to f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2-2)$

$f''(x) = \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}\underbrace{(4x^2-2)}_{<0\ \forall x\in[-0.5;0,5]} \rightsquigarrow E_T = \underbrace{\underbrace{\frac{-1}{12}0{,}02}_{<0} \cdot \underbrace{f''\varphi}_{<0}}_{>0\ \forall x\in[-0,5;0,5]}$

$E_T > 0 \to A < I \to \boxed{F}$

b) Halle la menor cantidad de subintervalos para asegurar que al resolverla por trapecios el error sea menor que 10^{-3}

$|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\varphi)| = \frac{1}{12} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-3}$

Busco $|f''(\varphi)|$ máx

$f'''(x) = -2x e^{-x^2}(4x^2-2) + e^{-x^2} 8x = 2x e^{-x^2}(4+2-4x^2) = 2x e^{-x^2}(6-4x^2) = 0$

$\rightsquigarrow x = 0 \vee 6-4x^2 = 0 \to \boxed{x=0} \vee 6 = 4x^2 \to \boxed{x = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

$|f''(-0{,}5)| = 0{,}7788007831$

$|f''(0{,}5)| = 0{,}7788007831$

$|f''(0)| = 2$ • Máx

$|f''(\frac{\sqrt{6}}{2})| = 0{,}8925206406$

$|E_T| = \frac{h^2}{12} \cdot 2 < 10^{-3} \to h^2 < 0{,}006$
$\to h < 0{,}07745966692$

$m \cdot h = 1$

$h < 0{,}07745966692 \to m > 12{,}91$

$m = 13 \to h = 0{,}0769\ldots$

$m = 16 \to h = 0{,}0625$

$$\boxed{m = 16}$$ ✓